Экзаменационные задачи по курсу
математического анализа (IV семестр)

1. Для функции $z = \sqrt{\cos \pi (x^2 + y^2)}$ определить оласть определения Ω, множества всех значений v и вид линий уровня L_α.

2. Показать, что для последовательности $a_{mn} = \frac{1}{m-n+0{,}5}, m, n = 1, 2, \ldots$, имеем $\lim\limits_{m\to\infty}(\lim\limits_{n\to\infty} a_{mn}) = \lim\limits_{n\to\infty}(\lim\limits_{m\to\infty} a_{mn})$, однако $\lim\limits_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} a_{mn}$ не существует.

3. Показать, что функция $f(x, y) = \frac{x^2}{x^2+y^2-x}$ стремится к нулю, если точка (x, y) стремится к началу координат $(0, 0)$ по любой прямой, однако эта функция не имеет предела в точке $(0, 0)$.

4. Доопределить функцию $f(x, y) = \frac{1-\cos(xy)}{x^2y^2}$ на линиях $x = 0$ и $y = 0$ так, чтобы она была непрерывна во всей плоскости Oxy.

5. Показать, что функция $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$ имеет частные производные $f'_x(0, 0)$ и $f'_y(0, 0)$, равные нулю, однако эта функция не является дифференцируемой в точке $(0, 0)$.

6. Найти производную функции $z = x^2 - y^2$ в точке $M = (1, 1)$ в направлении $\vec{e}$, составляющим угол $\alpha = 60^\circ$с положительным направлением оси Ox.

7. Найти производную функции $z = \ln(x^2 + y^2)$ в точке $M_0 = (x_0, y_0)$ в направлении $\vec{e}$, перпендикуляром линии уровня, проходящей через эту точку.

8. Найти производную функции $u = xyz$ в точке $M = (1, 1, 1)$ в направлении $\vec{e} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$. Чему равна величина градиента функции в этой точке?

9. Проверить, что на любой линии условия функции $z = \arctan \sqrt{\dfrac{x}{y}}$, $grad\ z$ ортогонален этой линии.

10. Найти угол между градиентами функции $\mu = x^2 + y^2 + z^2$ в точках $A = (a, 0, 0)$ и $B = (0, b, 0)$.

11. Вывести уравнение касательной плоскости к поверхности, заданной уравнением $z = \sqrt{(1+x)^3 + (2-y)^3}$, в точке $M_0 = (0, 0)$.

12. Найти линию пересечения касательных плоскостей к поверхности, заданной уравнением $z = xy$, в точках $A = (1, 1, 1)$ и $B = (2, -2, -4)$.

13. Заменяя приращение функции дифференциалом, приближенно вычислить $1,002(2,003)^2(3,004)^3$.

14. Найти частные производные первого и второго порядка для функции $f(x, y) = x\sin(x+y) + y\cos(x+y)$.

15. Проверить равенство $\dfrac{\partial^2 z}{\partial z \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial z}$ для функции $z = \arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$.

16. Показать, что для функции $f(x, y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$

$f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0)$

17. Показать,что функция $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ $d^2 z \geq 0$.

18. Вывести приближенную формулу до членов второго порядка для функции $f(x, y) = \arctan\dfrac{1 + x + y}{1 - x + y}$.

19. Упростить выражение $\cos(x+y+z) - \cos x \cos y \cos z$, считая x, y, z малыми по абсолютной величине.

20. Найти локальные экстремумы функции $z = x^4 + y^4 - 2x^2 - 4xy - 2y^2$.

21. Исследовать функции $z = 10 - 5x - 7y$ на экстремумы при условии $x^2 + y^2 = 16$.

22. Найти максимальное и минимальное значение функции $z = x^2 y(4 - x - y)$ в области D, ограниченной линиями $x = 0$, $y = 0$ и $y = 8 - x$.

23. На элипсоиде $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8$ найти точку, наиболее удалённую от точки $A(0, 0, 3)$.

24. Определите размеры прямоугольного параллелепипеда наибольшего объема, если площадь его полной поверхности равна заданной величине S.

25. Найти условные экстремумы функции $u = \sin x \sin y \sin z$, если $x + y + z = \dfrac{\pi}{2}$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

26. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $u = (x + y)e^{xy}$ на множестве $-2 \leq x + y \leq 1$.

27. Найдите стационарные точки следующих функций:
а) $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$; б) $z = x^3 + y^3 + 6xy$.

28. Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ стационарная точка функции $u = f(x, y, z)$ и матрица вторых производных имеет вид:
а)

$$\begin{Vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{Vmatrix}$$

, б)

$$\begin{Vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{Vmatrix}$$

.
Является ли точка M_0 точкой экстремума? (Критерий Сильвестра)